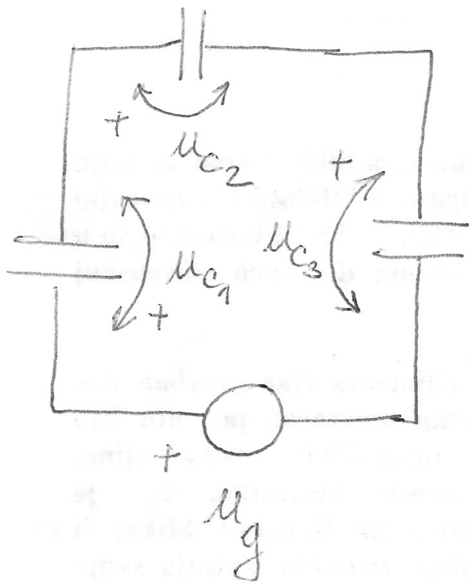


Slika 1: Kondenzatorska petlja.

1 Određivanje odziva u kolima drugog reda

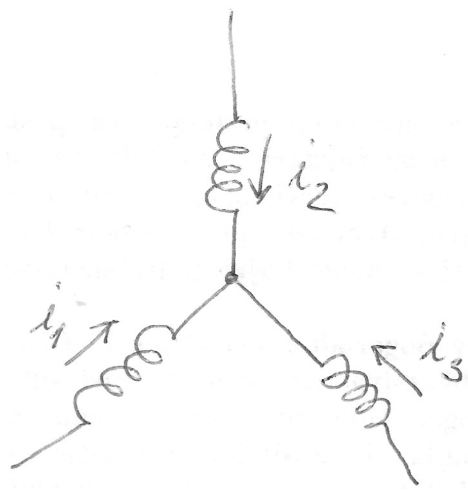
Kada se u kolu nalazi više dinamičkih elemenata, red kola je određen brojem *nezavisnih* dinamičkih elemenata. Dinamički element je nezavisan ako je promjenljiva kojom je opisano njeno stanje (napon na kondenzatoru ili struja kalema) nezavisna veličina, odnosno, ne može se izračunati pomoću ostalih nezavisnih promjenljivih. Na primjer, u kolu na Slici 1, naponi na kondenzatorima nisu nezavisne veličine jer se napon na jednom od kondenzatora može izračunati na osnovu napona na druga dva kondenzatora. U ovom slučaju, samo dva kondenzatora su nezavisna. Analogno, u mreži na Slici 2, samo dva kalema su nezavisna jer se struja jednog od kalemova može izračunati na osnovu struja druga dva kalema. Dakle, kolo drugog reda sadrži bar dva dinamička elementa.

1.1 Redno RLC kolo

Karakterističan primjer kola drugog reda je redno RLC kolo. Ono sadrži dva dinamička elementa – kalem i kondenzator. Neka je dato redno RLC kolo prikazano na Slici 3. U kolu je akumulisana energija izražena početnim uslovima za napon na kondenzatoru i struju kalema

$$u_C\left(0^-\right) = U_0, \tag{1}$$

$$i_L\left(0^-\right) = I_0, \tag{2}$$



Slika 2: Kalemski presjek.

respektivno. U kolu djeluje pobudni generator u_g.

Prema KZN za ovo kolo vrijedi

$$u_R + u_L + u_C = u_g. \tag{3}$$

Karakteristike elemenata kola su

$$u_R = Ri_R, \tag{4}$$
$$u_L = L\frac{di_L}{dt}, \tag{5}$$
$$i_C = C\frac{du_C}{dt}. \tag{6}$$

Kako bismo iskoristili teoremu neprekidnosti, pogodno je formirati diferencijalnu jednačinu po naponu na kondenzatoru ili struji kalema. Struje svih elemenata kola su jednake

$$i_R = i_L = i_C = i, \tag{7}$$

pa imamo

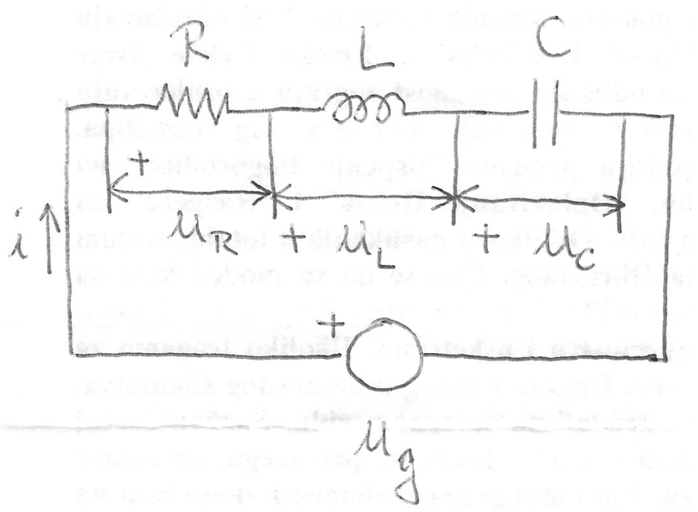
$$u_R = RC\frac{du_C}{dt} \tag{8}$$

i

$$u_L = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}. \tag{9}$$

Sada je diferencijalna jednačina za napon na kondenzatoru

$$RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = u_g. \tag{10}$$



Slika 3: Redno RLC kolo.

Dovođenjem na kanonski oblik imamo

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_g. \tag{11}$$

Ako želimo da formiramo diferencijalnu jednačinu po struji kalema imamo

$$Ri + u_C + L\frac{di_L}{dt} = u_g.$$

Pošto je struja proporcionalna izvodu napona na kondenzatoru, prethodnu jednačinu ćemo derivirati pa dobijamo

$$R\frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} + L\frac{d^2i_L}{dt^2} = \frac{du_g}{dt}.$$

Sada je

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i + L\frac{d^2i_L}{dt^2} = \frac{du_g}{dt}.$$

Dovođenjem na kanonski oblik jednačina je

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{du_g}{dt}. \tag{12}$$

1.2 Odziv rednog RLC kola na akumulisanu energiju

Za početak ćemo posmatrati odziv rednog RLC kola na akumulisanu energiju, bez uključivanja pobude, kako bismo se fokusirali na analizu ponašanja samog kola. U narednoj analizi ćemo, dakle, smatrati da je $u_g(t) = 0$ i odredićemo napon na kondenzatoru, rješavanjem jednačine (11) koja postaje

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0. \tag{13}$$

Uvešćemo oznake

$$\alpha = \frac{R}{2L},$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Diferencijalna jednačina je sada oblika

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\alpha\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0. \tag{14}$$

Ovo je u stvari jednačina harmonijskog oscilatora

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{15}$$

Pošto se radi o homogenoj diferencijalnoj jednačini rješenje ćemo pretpostaviti u obliku

$$u_C(t) = Ke^{\underline{s}t}. \tag{16}$$

Sada je

$$K\underline{s}^2 e^{\underline{s}t} + \frac{R}{L}K\underline{s}e^{\underline{s}t} + \frac{1}{LC}Ke^{\underline{s}t} = 0$$

Odakle se dobija karakteristična jednačina rednog RLC kola

$$\underline{s}^2 + \frac{R}{L}\underline{s} + \frac{1}{LC} = 0, \tag{17}$$

odnosno,

$$\underline{s}^2 + 2\alpha\underline{s} + \omega_0^2 = 0.$$

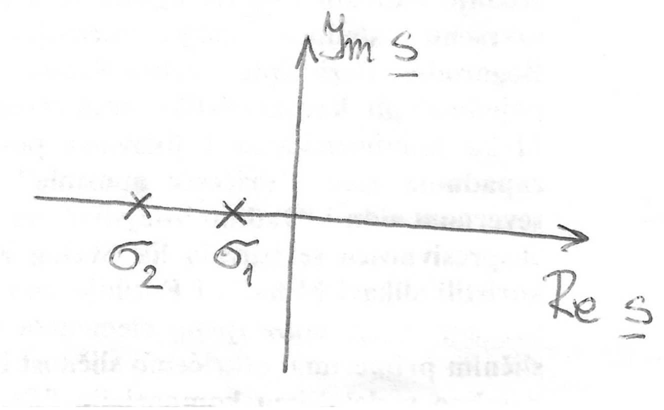
Sopstvene učestanosti su

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{18}$$

U zavisnosti od prirode sopstvenih učestanosti, razlikovaćemo tri slučaja:

1. $\alpha > \omega_0$ – sopstvene učestanosti su realne i različite,

2. $\alpha = \omega_0$ – sopstvene učestanosti su realne i jednake, tj. karakteristična jednačina ima jedan dvostruki korijen,



Slika 4: Realne i različite sopstvene učestanosti.

3. $\alpha < \omega_0$ – sopstvene učestanosti su konjugovano kompleksne.

Razmotrićemo ove slučajeve detaljnije.

1. Slučaj. U ovom slučaju je $\alpha > \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su realne i različite i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \tag{19}$$

gdje je

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha. \tag{20}$$

Položaj sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni je prikazan na Slici 4.

Odziv je oblika

$$u_C\left(t\right) = K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t}. \tag{21}$$

Integracione konstante određujemo pomoću početnih uslova

$$u_C\left(0^+\right) = u_C\left(0^-\right) = U_0, \tag{22}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = \frac{1}{C}i\left(0^+\right) = \frac{1}{C}i\left(0^-\right) = \frac{I_0}{C}. \tag{23}$$

Iz odziva je

$$u_C\left(0^+\right) = K_1 + K_2, \tag{24}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2. \tag{25}$$

Imamo

$$K_1 + K_2 = U_0, \tag{26}$$

$$\sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 = \frac{I_0}{C}. \tag{27}$$

Rješavanje sistema jednačina dobija se

$$K_1 = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right), \tag{28}$$

$$K_2 = -\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right). \tag{29}$$

Napon na kondenzatoru za $t \geq 0$ je jednak

$$\begin{aligned} u_C\left(t\right) =& \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right) e^{\sigma_1 t} - \\ & - \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right) e^{\sigma_2 t}. \end{aligned} \tag{30}$$

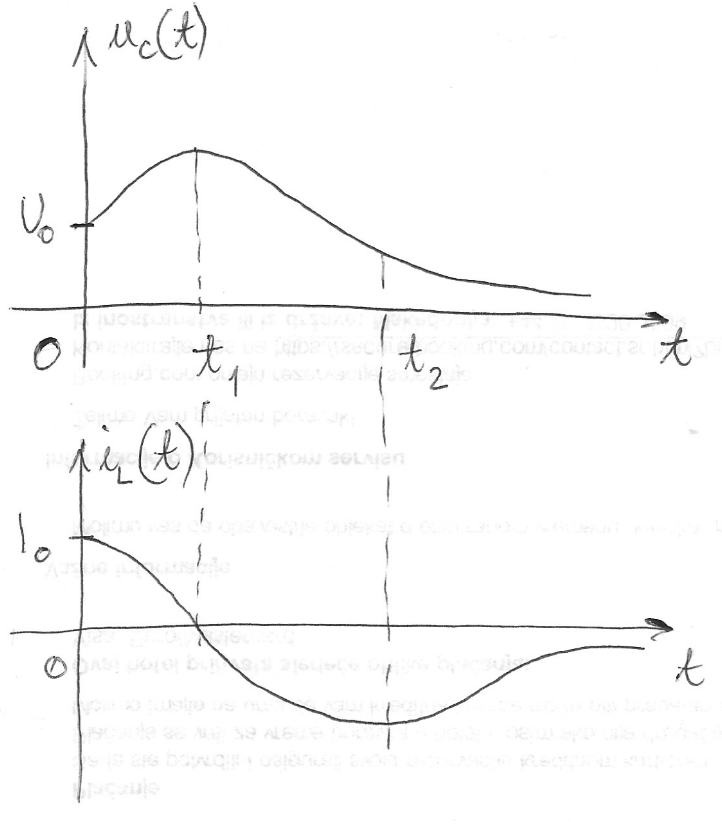
Struja u kolu za $t \geq 0$ je jednaka

$$\begin{aligned} i\left(t\right) = & C\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right) e^{\sigma_1 t} - \\ & - C\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right) e^{\sigma_2 t}. \end{aligned} \tag{31}$$

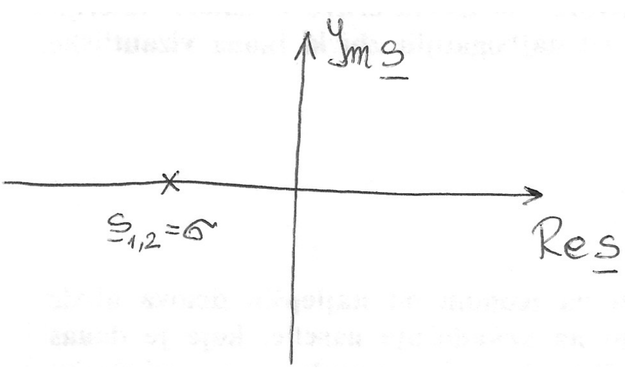
Grafici napona na kondenzatoru i struje u kolu su prikazani na Slici 5. Na početku, pošto struja kroz kalem ne može skokovito da se mijenja, ta struja puni kondenzator. Kada se sva energija akumulisana u kalemu potroši struja je jednaka nuli, a napon na kondenzatoru ima maksimalnu vrijednost. U nastavku, kondenzator se prazni pa napon na kondenzatoru opada. Struja u kolu prvo raste jer se povećava energija kalema. Međutim, nakon izvjesnog vremena, kada struja dosegne vrijednost za koju su gubici veći od trenutne energije kondenzatora, kalem počinje da predaje energiju otporniku što dovodi do smanjenja struje. U ovom slučaju, zbog velikih gubitaka, nema oscilovanja energije između kondenzatora i kalema. Kolo se nalazi u *aperiodičnom* režimu.

2. Slučaj. U ovom slučaju je $\alpha = \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su realne i jednake i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = \sigma = -\alpha = -\omega_0. \tag{32}$$



Slika 5: Aperiodični odziv u RLC kolu za $U_0 > 0, I_0 > 0$.



Slika 6: Jednake sopstvene učestanosti.

Položaj sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni je prikazan na Slici 6. Odziv je oblika

$$u_C\left(t\right) = \left(K_1 + K_2 t\right) e^{\sigma t}, \tag{33}$$

a kompletan odziv

$$u_C\left(t\right) = U_g + \left(K_1 + K_2 t\right) e^{\sigma t}. \tag{34}$$

Integracione konstante određujemo iz početnih uslova (91) i (92). Iz opšteg oblika odziva je

$$u_C\left(0^+\right) = K_1, \tag{35}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = \sigma K_1 + K_2, \tag{36}$$

pa je

$$K_1 = U_0, \tag{37}$$

$$\sigma_1 K_1 + K_2 = \frac{I_0}{C}. \tag{38}$$

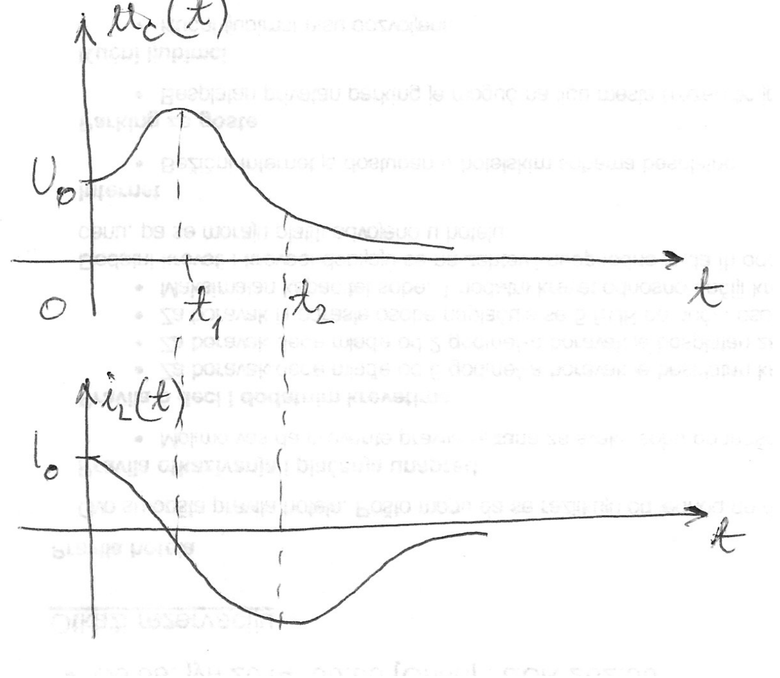
Rješenja sistema su

$$K_1 = U_0, \tag{39}$$

$$K_2 = \frac{I_0}{C} - \sigma U_0. \tag{40}$$

Kompletan odziv je sada

$$u_C\left(t\right) = U_0\left(1 - \sigma t\right) e^{\sigma t} + \frac{I_0}{C} t e^{\sigma t}. \tag{41}$$



Slika 7: Kriticni odziv u RLC kolu za $U_0 > 0, I_0 > 0$.

Struja u kolu je jednaka

$$\begin{aligned} i(t) &= -\sigma^2 C U_0 t e^{\sigma t} + I_0 (1 + \sigma t) e^{\sigma t} = \\ &= -\frac{1}{L} U_0 t e^{\sigma t} + I_0 (1 + \sigma t) e^{\sigma t}. \end{aligned} \tag{42}$$

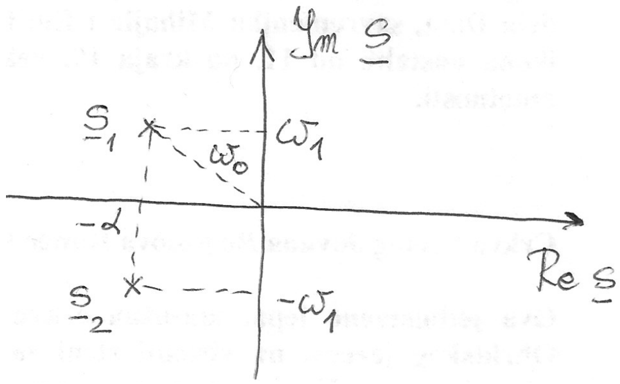
Grafici ovih veličina su prikazani na Slici 7. U ovom slučaju kolo se nalazi u *kritičnom režimu.* Razmjena energije između elemenata kola je slična aperiodičnom slučaju. Ni u ovom slučaju se u kolu ne javljaju oscilacije.

3. Slučaj. U ovom slučaju je $\alpha < \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su konjugovano kompleksne i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_1. \tag{43}$$

Položaj sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni je prikazan na Slici 8. Odziv na akumulisanu energiju je oblika

$$u_{Ch}(t) = \underline{K}_1 e^{\underline{s}_1 t} + \underline{K}_2 e^{\underline{s}_2 t}. \tag{44}$$



Slika 8: Konjugovano kompleksne sopstvene učestanosti rednog RLC kola.

Integracione konstante $\underline{K}_1$ i $\underline{K}_2$ su takođe konjugovano kompleksni pa se odziv može napisati u obliku

$$u_{Ch}(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right), \tag{45}$$

gdje su A i B realne integracione konstante.

Integracione konstante određujemo iz početnih uslova (91) i (92). Iz odziva je

$$u_C\left(0^+\right) = A, \tag{46}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = -\alpha A + \omega_1 B \tag{47}$$

pa je

$$A = U_0, \tag{48}$$

$$-\alpha A + \omega_1 B = \frac{I_0}{C}. \tag{49}$$

Rješavanjem sistema dobija se

$$A = U_0. \tag{50}$$

$$B = \frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}U_0. \tag{51}$$

Odziv na akumulisanu energiju je sada

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}\left[U_0\cos\omega_1 t + \left(\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}U_0\right)\sin\omega_1 t\right]. \tag{52}$$

Struja u kolu je jednaka

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t}\left[I_0\cos\omega_1 t - \left(\frac{\alpha}{\omega_1}I_0 + \frac{\omega_0^2 C}{\omega_1}U_0\right)\sin\omega_1 t\right] = \\ &= e^{-\alpha t}\left[I_0\cos\omega_1 t - \left(\frac{\alpha}{\omega_1}I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}U_0\right)\sin\omega_1 t\right] \end{aligned} \tag{53}$$

Grafici ovih veličina su prikazani na Slici 9. U ovom slučaju se kolo nalazi u *pseudoperiodičnom režimu.* Izraze za napon na kondenzatoru i struju kalema moguće je napisati i u obliku

$$u_C(t) = U_{Cm}e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \theta), \tag{54}$$

$$i(t) = I_m e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \psi), \tag{55}$$

gdje je

$$U_{Cm} = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}U_0\right)^2}, \tag{56}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\left(\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}U_0\right)}{U_0}, \tag{57}$$

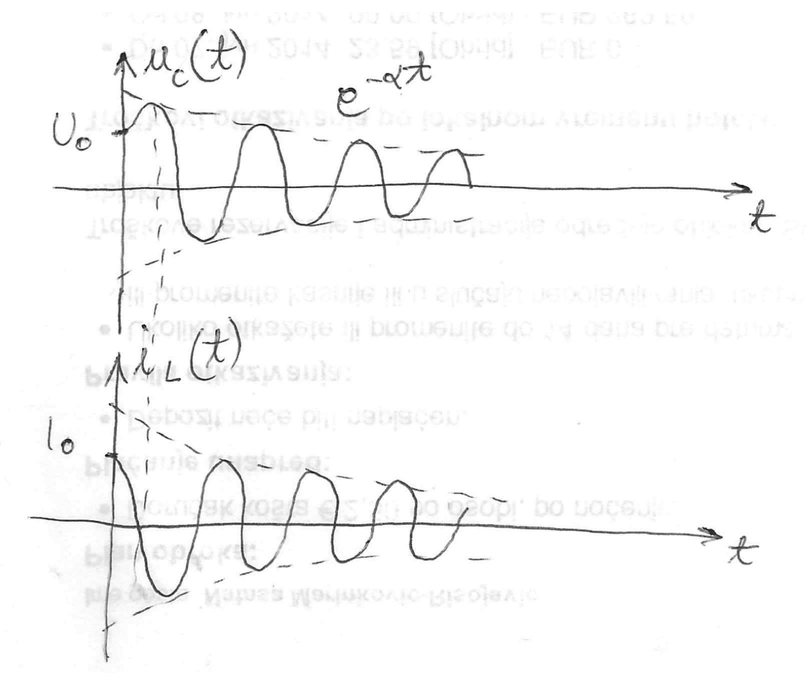
$$I_m = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{\alpha}{\omega_1}I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}U_0\right)^2}, \tag{58}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{\alpha}{\omega_1}I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}U_0}{I_0}. \tag{59}$$

U ovom slučaju dolazi do razmjene energije između kalema i kondenzatora. U kolu se javljaju *sopstvene oscilacije.* Fazna razlika između napona i struje ipak nije tačno $\frac{\pi}{2}$ radijana. Oscilacije koje nastaju su prigušene i brzina opadanja njihove amplitude zavisi od *koeficijenta prigušenja* α. Pošto je α direktno proporcionalno otpornosti R slijedi da će izborom otpornika veće otpornosti i amplituda oscilacija brže opadati, odnosno, prigušenje će biti izraženije, sve dok vrijednost otpornika ne dosegne $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ što je granica kritičnog slučaja, kada oscilacije iščezavaju. Frekvencija oscilacija je ω_1. Iz veze koja postoji između veličina ω_1, ω_0 i α, (43) jasno je zašto se $\underline{s}_1$ i $\underline{s}_2$ nazivaju sopstvenim učestanostima kola.

1.3 Odziv LC kola na akumulisanu energiju

U slučaju da su gubici u rednom RLC kolu zanemarivo mali, rezultujuće kolo je LC kolo prikazano na Slici 10.



Slika 9: Pseudoperiodican odziv u RLC kolu.

Diferencijalna jednačina koja opisuje sopstveni režim u ovom kolu se dobija iz (13) za $R = 0$ i ima oblik

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0, \tag{60}$$

uz početne uslove $u_C\left(0^-\right) = U_0$ i $i\left(0^-\right) = I_0$.

Karakteristična jednačina je

$$\underline{s}^2 + \frac{1}{LC} = 0, \tag{61}$$

čiji su korijeni (sopstvene učestanosti) jednaki

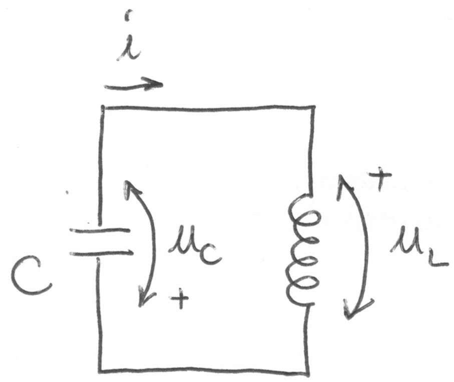
$$\underline{s}_{1,2} = \pm j\omega_0 = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{62}$$

Položaj sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni je prikazan na Slici 11.

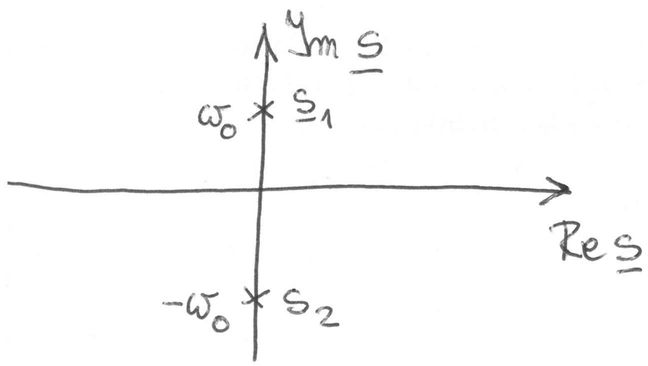
Napon na kondenzatoru je jednak, na osnovu (52) uz $\alpha = 0$ jednak

$$u_{Ca}\left(t\right) = U_0 \cos\omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C}\sin\omega_0 t = \tag{63}$$

$$= U_m \cos\left(\omega_0 t + \theta\right), \tag{64}$$



Slika 10: LC kolo.



Slika 11: Položaj sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni.

gdje su

$$U_m = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{I_0}{\omega_0 C}\right)^2}, \tag{65}$$

$$\theta = -\operatorname{arctg}\frac{I_0}{\omega_0 C U_0}. \tag{66}$$

Struja kalema je jednaka je, na osnovu (53), uz $\alpha = 0$, jednaka

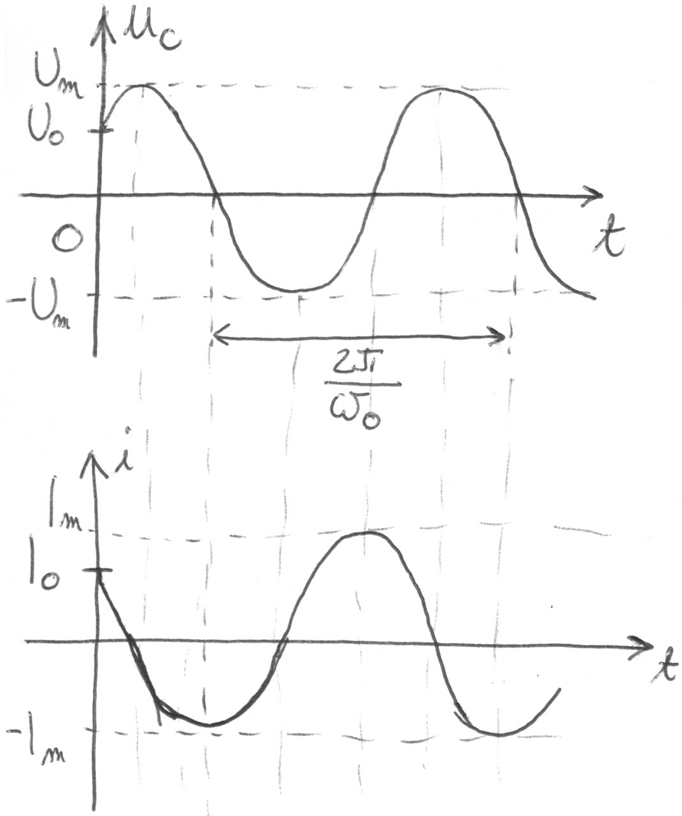
$$i_a(t) = I_0 \cos\omega_0 t - \omega_0 C U_0 \sin\omega_0 t = \tag{67}$$

$$= I_m \cos(\omega_0 t + \psi), \tag{68}$$

gdje su

$$I_m = \sqrt{I_0^2 + (\omega_0 C U_0)^2} = \omega_0 C U_m, \tag{69}$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0 C U_0}{I_0} = \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{70}$$



Slika 12: Odziv LC kola na akumulisanu energiju.

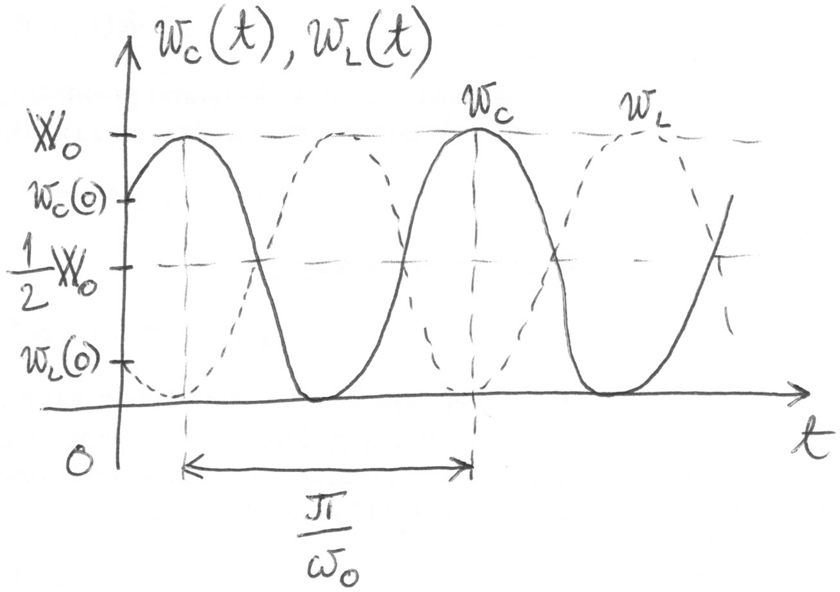
Grafici napona na kondenzatoru i struje u kolu u funkciji vremena prikazani su na Slici 12. Režim u kolu je *prostoperiodičan*. Energija u kolu osciluje između kalema i kondenzatora. Učestanost oscilacija jednaka je sopstvenoj učestanosti kola ω_0. Pošto su gubici u kolu u ovom slučaju zanemarljivo mali, sopstvene oscilacije nisu prigušene. U ovom slučaju su napon i struja u kolu u *kvadraturi* jer je fazni pomak između njih $\frac{\pi}{2}$.

Razmotrimo sada ukupnu energiju u kolu u ovom slučaju. Akumulisana energija u kondenzatoru je jednaka

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cu_{Ca}^2(t) = \frac{1}{2}\left(CU_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega_0^2 C}\right)\cos^2(\omega_0 t + \theta) = \tag{71}$$

$$= \frac{1}{2}\left(CU_0^2 + LI_0^2\right)\cos^2(\omega_0 t + \theta) = \tag{72}$$

$$= W_0 \cos^2(\omega_0 t + \theta), \tag{73}$$



Slika 13: Dijagrami promjene energija kondenzatora i kalema u LC kolu.

a u kalemu

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_a^2(t) = \frac{1}{2}\left(LI_0^2 + \omega_0^2 LC^2 U_0\right) sin^2(\omega_0 t + \theta) = \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2}\left(CU_0^2 + LI_0^2\right)\sin^2(\omega_0 t + \theta) = \tag{75}$$

$$= W_0 \sin^2(\omega_0 t + \theta)\,. \tag{76}$$

Dijagrami promjene energija kondenzatora i kalema prikazani su na Slici 13.

Ukupna energija u LC kolu je

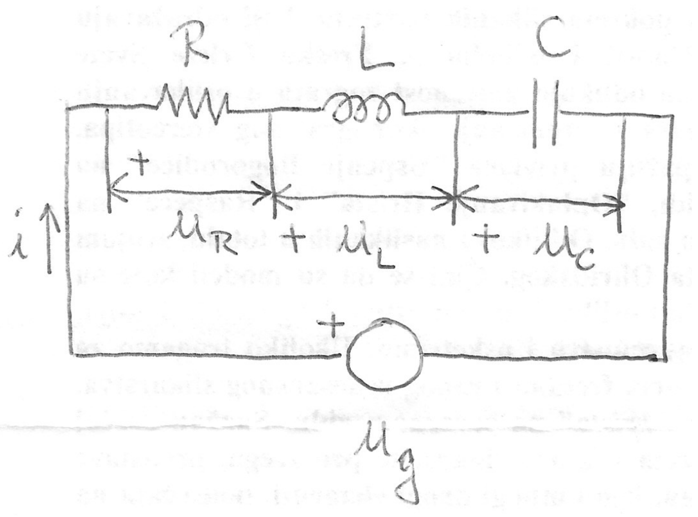
$$w(t) = w_C(t) + w_L(t) = \tag{77}$$

$$= \frac{1}{2}\left(CU_0^2 + LI_0^2\right) = \tag{78}$$

$$= w_C(0) + w_L(0) = \tag{79}$$

$$= W_0 = \text{const}\,. \tag{80}$$

Dakle, ukupna energija u kolu je konstantna i jednaka je početnoj energiji kola. Redno LC kolo je bez gubitaka, posredstvom električne struje samo dolazi do razmjene energije između dinamičkih elemenata – kalema i kondenzatora.



Slika 14: Redno RLC kolo.

1.4 Odziv rednog RLC kola na uključenje pobude

Pretpostavimo sada da u rednom RLC kolu, Slika 14 djeluje odskočni pobudni generator. Napon na kondenzatoru dat je jednačinom (11). Za Hevisajdovu pobudu ova jednačina je oblika

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=\frac{1}{LC}Uh\left(t\right), \tag{81}$$

odnosno,

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\alpha\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2Uh\left(t\right) \tag{82}$$

Rješenje se može predstaviti kao zbir homogenog i partikularnog rješenja

$$u_C=u_{Ch}+u_{Cp}. \tag{83}$$

Partikularno rješenje ima isti oblik kao pobuda za $t>0$. Pošto je pobuda konstantna za $t>0$, pretpostavljamo partikularno rješenje u obliku

$$u_{Cp}\left(t\right)\equiv U_p. \tag{84}$$

Iz diferencijalne jednačine dobijamo da je

$$U_p=U_g. \tag{85}$$

Homogeno rješenje diferencijalne jednačine (81) je razmatrano kada je određivan odziv rednog RLC kola na akumulisanu energiju tako da ćemo ovdje ponoviti samo osnovne rezultate. Karakteristična jednačina rednog RLC kola je

$$\underline{s}^2 + \frac{R}{L}\underline{s} + \frac{1}{LC} = 0, \tag{86}$$

odnosno,

$$\underline{s}^2 + 2\alpha\underline{s} + \omega_0^2 = 0.$$

Sopstvene učestanosti su

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{87}$$

Ponovo razlikujemo tri slučaja u zavisnosti od položaja sopstvenih učestanosti u kompleksnoj ravni:

1. $\alpha > \omega_0$ – sopstvene učestanosti su realne i različite,
2. $\alpha = \omega_0$ – sopstvene učestanosti su realne i jednake, tj. karakteristična jednačina ima jedan dvostruki korijen,
3. $\alpha < \omega_0$ – sopstvene učestanosti su konjugovano kompleksne.

1. Aperiodični odziv. U ovom slučaju je $\alpha > \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su realne i različite i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \tag{88}$$

gdje je

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha. \tag{89}$$

Kompletan odziv je oblika

$$u_C(t) = U_g + K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t}. \tag{90}$$

Pošto smo odziv na akumulisanu energiju detaljno razmatrali u prethodnom odjeljku, u nastavku ćemo pretpostaviti da je akumulisana energija u kolu jednaka nuli, odnosno da je $U_0 = 0, I_0 = 0$. Integracione konstante određujemo pomoću početnih uslova

$$u_C\left(0^+\right) = u_C\left(0^-\right) = U_0 = 0, \tag{91}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = \frac{1}{C}i\left(0^+\right) = \frac{1}{C}i\left(0^-\right) = \frac{I_0}{C} = 0. \tag{92}$$

Iz odziva je

$$u_C\left(0^+\right) = U_g + K_1 + K_2, \tag{93}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2. \tag{94}$$

Imamo

$$K_1 + K_2 = -U_g, \tag{95}$$

$$\sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 = 0. \tag{96}$$

Rješavanjem sistema jednačina dobija se

$$K_1 = \frac{\sigma_2 U_g}{\sigma_1 - \sigma_2}, \tag{97}$$

$$K_2 = -\frac{\sigma_1 U_g}{\sigma_1 - \sigma_2}. \tag{98}$$

Za $t > 0$, napon na kondenzatoru je jednak

$$u_C\left(t\right) = U_g + U_g\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}e^{\sigma_1 t} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}e^{\sigma_2 t}\right), \tag{99}$$

a struja kalema

$$i\left(t\right) = CU_g\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}\right). \tag{100}$$

Indicione funkcije za napon na kondenzatoru i struju u kolu su

$$f_{u_C}\left(t\right) = \left[1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}e^{\sigma_1 t} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}e^{\sigma_2 t}\right)\right]h\left(t\right), \tag{101}$$

$$f_i\left(t\right) = C\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}\right)h\left(t\right). \tag{102}$$

Grinove funkcije su

$$g_{u_C}\left(t\right) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}\right)h\left(t\right), \tag{103}$$

$$g_i\left(t\right) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\sigma_1 e^{\sigma_1 t} - \sigma_2 e^{\sigma_2 t}\right)h\left(t\right). \tag{104}$$

Kompletan odziv je jednak zbiru odziva na akumulisanu energiju i odziva na pobudu pa je napon na kondenzatoru

$$\begin{aligned} u_C\left(t\right) &= u_{Ca}\left(t\right) + u_{Ce}\left(t\right) = \\ &= U_g + \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[\frac{I_0}{C} - \sigma_2\left(U_0 - U_g\right)\right]e^{\sigma_1 t} - \\ &- \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[\frac{I_0}{C} - \sigma_1\left(U_0 - U_g\right)\right]e^{\sigma_2 t}. \end{aligned} \tag{105}$$

Struja u kolu je jednaka

$$
\begin{aligned}
i(t) = i_a(t) + i_e(t) = \\
= \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[\frac{I_0}{C} - \sigma_2 (U_0 - U_g)\right] e^{\sigma_1 t} - \\
- \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[\frac{I_0}{C} - \sigma_1 (U_0 - U_g)\right] e^{\sigma_2 t}.
\end{aligned} \tag{106}
$$

2. Kritični odziv. U ovom slučaju je $\alpha = \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su realne i jednake i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = \sigma = -\alpha = -\omega_0. \tag{107}$$

Odziv je oblika

$$u_C(t) = U_g + (K_1 + K_2 t) e^{\sigma t}. \tag{108}$$

Integracione konstante određujemo iz početnih uslova (91) i (92). Ponovo ćemo pretpostaviti da u kolu nije bilo akumulisane energije. Iz odziva je

$$u_C(0^+) = U_g + K_1, \tag{109}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0^+) = \sigma K_1 + K_2, \tag{110}$$

pa je

$$U_g + K_1 = 0, \tag{111}$$

$$\sigma_1 K_1 + K_2 = 0. \tag{112}$$

Rješenja sistema su

$$K_1 = U_g, \tag{113}$$

$$K_2 = \sigma U_g. \tag{114}$$

Napon kondenzatora i struja u kolu su, dakle,

$$u_C(t) = U_g - U_g (1 - \sigma t) e^{\sigma t}, \tag{115}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} U_g t e^{\sigma t}. \tag{116}$$

Indicione funkcije su

$$f_{u_C}(t) = \left[1 - (1 - \sigma t) e^{\sigma t}\right] h(t), \tag{117}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{L} t e^{\sigma t} h(t). \tag{118}$$

Grinove funkcije su

$$g_{u_C}(t) = \sigma^2 t e^{\sigma t} h(t), \tag{119}$$

$$g_i(t) = \frac{1}{L}(1+\sigma t) e^{\sigma t} h(t). \tag{120}$$

Kompletan odziv je zbir odziva na akumulisanu energiju i odziva na eksitaciju pa je napon na kondenzatoru

$$u_C(t) = u_{Ca}(t) + u_{Ce}(t) = U_g + (U_0 - U_g)(1-\sigma t) e^{\sigma t} + \frac{I_0}{C} t e^{\sigma t}. \tag{121}$$

Struja u kolu je jednaka

$$\begin{aligned} i(t) &= i_a(t) + i_e(t) = \\ &= -\sigma^2 C (U_0 - U_g) t e^{\sigma t} + I_0 (1+\sigma t) e^{\sigma t} = \\ &= -\frac{1}{L}(U_0 - U_g) t e^{\sigma t} + I_0 (1+\sigma t) e^{\sigma t}. \end{aligned} \tag{122}$$

3. Pseudoperiodični slučaj. U ovom slučaju je $\alpha < \omega_0$ što je ekvivalentno uslovu da je $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Sopstvene učestanosti su konjugovano kompleksne i mogu se napisati u obliku

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_1. \tag{123}$$

Opšti oblik odziva je

$$u_C(t) = U_g + e^{-\alpha t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t). \tag{124}$$

Pretpostavljamo da u kolu nije bilo akumulisane energije. Integracione konstante određujemo iz početnih uslova (91) i (92). Iz odziva je

$$u_C\left(0^+\right) = U_g + A, \tag{125}$$

$$\frac{du_C}{dt}\left(0^+\right) = -\alpha A + \omega_1 B \tag{126}$$

pa je

$$U_g + A = 0, \tag{127}$$

$$-\alpha A + \omega_1 B = 0. \tag{128}$$

Rješavanjem sistema dobija se

$$A = -U_g. \tag{129}$$

$$B = -\frac{\alpha}{\omega_1} U_g. \tag{130}$$

Napon na kondenzatoru i struja u kolu su sada

$$u_C(t) = U_g - U_g e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right), \tag{131}$$

$$i(t) = \frac{U_g}{\omega_1 L} e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t. \tag{132}$$

Indicione funkcije su

$$f_{u_C}(t) = 1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right), \tag{133}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{\omega_1 L} e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t)\, h(t). \tag{134}$$

Grinove funkcije su

$$g_{u_C}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t)\, h(t), \tag{135}$$

$$g_i(t) = \frac{1}{\omega_1 L} e^{-\alpha t}(\omega_1\cos\omega_1 t - \alpha\sin\omega_1 t)\, h(t). \tag{136}$$

Kompletan odziv je

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Ca}(t) + u_{Ce}(t) = \\ &= U_g + e^{-\alpha t}\left\{(U_0 - U_g)\cos\omega_1 t + \left[\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}(U_0 - U_g)\right]\sin\omega_1 t\right\}. \end{aligned} \tag{137}$$

Struja u kolu je jednaka

$$\begin{aligned} i(t) &= i_a(t) + i_e(t) = \\ &= e^{-\alpha t}\left\{I_0\cos\omega_1 t - \left[\frac{\alpha}{\omega_1} I_0 + \frac{\omega_0^2 C}{\omega_1}(U_0 - U_g)\right]\sin\omega_1 t\right\} = \\ &= e^{-\alpha t}\left\{I_0\cos\omega_1 t - \left[\frac{\alpha}{\omega_1} I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}(U_0 - U_g)\right]\sin\omega_1 t\right\} \end{aligned} \tag{138}$$

U ovom slučaju se kolo nalazi u *pseudoperiodičnom režimu.* Izraze za napon na kondenzatoru i struju kalema moguće je napisati i u obliku

$$u_C(t) = U_{Cm} e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \theta), \tag{139}$$

$$i(t) = I_m e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \psi), \tag{140}$$

gdje je

$$U_{Cm} = \sqrt{\left(U_0 - U_g\right)^2 + \left[\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}\left(U_0 - U_g\right)\right]^2}, \tag{141}$$

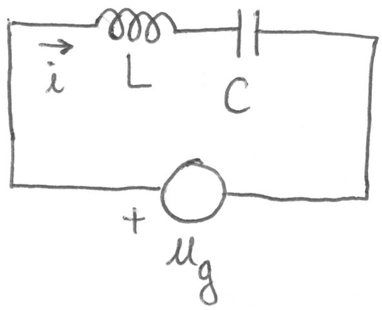
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\left[\frac{I_0}{\omega_1 C} + \frac{\alpha}{\omega_1}\left(U_0 - U_g\right)\right]}{U_0 - U_g}, \tag{142}$$

$$I_m = \sqrt{I_0^2 + \left[\frac{\alpha}{\omega_1} I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}\left(U_0 - U_g\right)\right]^2}, \tag{143}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{\alpha}{\omega_1} I_0 + \frac{1}{\omega_1 L}\left(U_0 - U_g\right)}{I_0}. \tag{144}$$

1.5 Odziva rednog LC kola na Hevisajdovu pobudu

U slučaju da su gubici u rednom RLC kolu zanemarivo mali, rezultujuće kolo je redno LC kolo prikazano na Slici 15.



Slika 15: Redno LC kolo.

Diferencijalna jednačina koja opisuje ovo kolo se dobija iz (11) za $R = 0$ i ima oblik

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = u_g. \tag{145}$$

Odredićemo odziv rednog LC kola na Hevisajdovu pobudu, $u_g(t) = U_g h(t)$ uz pretpostavku da u kolu nije bilo akumulisane energije za $t < 0$. Odziv kola je, na osnovu (131) i (132), uz $\alpha = 0$, jednak

$$u_C(t) = U_g - U_g \cos\omega_0 t, \tag{146}$$

$$i(t) = \omega_0 C U_g \sin\omega_0 t. \tag{147}$$

Režim u kolu je *prostoperiodičan.*

Indicione funkcije za napon na kondenzatoru i struju kalema su

$$f_{u_C}(t) = (1 - \cos\omega_0 t)\, h(t)\,, \tag{148}$$
$$f_i(t) = \omega_0 C \sin(\omega_0 t)\, h(t)\,. \tag{149}$$

Grinove funkcije

$$g_{u_C}(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t)\, h(t)\,, \tag{150}$$
$$g_i(t) = \omega_0^2 C \cos(\omega_0 t)\, h(t)\,. \tag{151}$$

Kompletan odziv kola za $t > 0$ je

$$u_C(t) = u_{Ca}(t) + u_{Ce}(t) = \tag{152}$$
$$= U_g + \left[(U_0 - U_g)\cos\omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C}\sin\omega_0 t\right], \tag{153}$$
$$i(t) = i_a(t) + i_e(t) = \tag{154}$$
$$= I_0 \cos\omega_0 t - \omega_0 C\,(U_0 - U_g)\sin\omega_0 t. \tag{155}$$

2 Određivanje odziva u opštem slučaju

U opštem slučaju, kolo može biti proizvoljnog reda, sa akumulisanom energijom i pobudnim generatorima. Određivanje kompletnog odziva se sastoji od sljedećih koraka:

1. Opisati kolo postavljanjem diferencijalne jednačine koja povezuje izlaznu i ulazne promjenljive,
2. Odrediti početne uslove u kolu,
3. Riješiti diferencijalnu jednačinu,
4. Na osnovu početnih uslova odrediti konstante integracije.

Diferencijalna jednačina se može riješiti na dva načina:

- Direktni način,
- Metodom superpozicije.

Kada se diferencijalna jednačina rješava direktnim načinom, odziv se predstavlja kao zbir homogenog i partikularnog rješenja koja se nalaze na način koji je predstavljen u prethodnim primjerima. Konstante integracije se određuju na osnovu početnih uslova.

Kada se koristi metod superpozicije, odziv u kolu se predstavlja kao suma odziva na akumulisanu energiju i pobudu. Odziv na akumulisanu energiju se određuje u kolu u kojem ne djeluju pobudni generatori, a odziv na pobudu se određuje za kolo bez akumulisane energije. Za svaki od odziva pojedinačno potrebno je odrediti konstante integracije. Ukoliko u kolu djeluje više pobudnih generatora, moguće je odziv na pobudu predstaviti kao zbir odziva na svaki od pojedinačnih generatora.

Kolo n-tog reda je opisano diferencijalnom jednačinom n-tog reda

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_0 y = \\ = b_n\frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + b_0 x, \end{aligned} \tag{156}$$

gdje je $x(t)$ pobuda, a $y(t)$ odziv kola. Rješenje ove jednačine takođe može da se prikaže kao zbir homogenog (sopstvenog) i partikularnog (prinudnog) rješenja (odziva),

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)\,. \tag{157}$$

Sopstveni odziv je rješenje homogene diferencijalne jednačine

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_0 y = 0 \tag{158}$$

i pretpostavljamo ga u obliku $y_h(t) = Ke^{\underline{s}t}$. Rješavanjem karakteristične jednačine

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_0 = 0, \tag{159}$$

dobijamo n sopstvenih učestanosti kola, $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$.

Ukoliko su sve sopstvene učestanosti kola jednostruke i realne, sopstveni odziv je oblika

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} K_k e^{s_k t}. \tag{160}$$

Ukoliko je, međutim, sopstvena učestanost s_1 reda r, a ostale sopstvene učestanosti, $s_{r+1}, \ldots, s_n$, su jednostruke, sopstveni odziv je oblika

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{r} K_k t^{r-k} e^{s_k t} + \sum_{k=r+1}^{n} K_k e^{s_k t}. \tag{161}$$

Svaki par konjugovano kompleksnih jednostrukih sopstvenih učestanosti $\underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i$ i $\underline{s}_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ rezultuje dodavanjem jednog člana oblika

$$e^{\sigma_i t}\left(A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t\right) \tag{162}$$

sopstvenom odzivu. Ukoliko postoji par konjugovano kompleksnih učestanosti reda r odgovarajući član u sopstvenom odzivu je oblika

$$\sum_{i=1}^{r} t^{r-i} e^{\sigma_i t} \left(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t \right). \tag{163}$$

Prinudni odziv se pretpostavlja u istom obliku kao i pobuda i određuje se rješavanjem diferencijalne jednačine.