Jednačine stanja

17. decembar 2015

Vrijednosti napona i struja u električnom kolu mogu se odrediti rješavanjem sistema jednačina napisanih po Kirhofovim zakonima uz dodatak karakteristika elemenata. Kada se posmatra linearno i vremenski nepromjenljivo kolo, na ovaj način je moguće dobiti sistem od n nezavisnih linearnih diferencijalnih jednačina čiji je oblik

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{1}$$

gdje je

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}^T, \tag{2}$$

vektor stanja kola, a $\mathbf{u}$ vektor pobudnih generatora. Elementi vektora stanja su veličine koje opisuju stanje kola u trenutku t i nazivaju se *promjenljive stanja*. Sistem jednačina (1) je *sistem jednačina stanja*.

Stanje kola u proizvoljnom trenutku zavisi od energije akumulisane u kolu i pobuda koje djeluju. Slijedi da promjenljive stanja moraju zadovoljavati sljedeće uslove:

1. Ako su poznate vrijednosti promjenljivih stanja u početnom trenutku t_0, $x_i(t_0)$, i oblici pobuda $u_j(t)$ za $t > t_0$, moguće je odrediti vrijednosti promjenljivih stanja $x_i(t)$ za $t > t_0$;

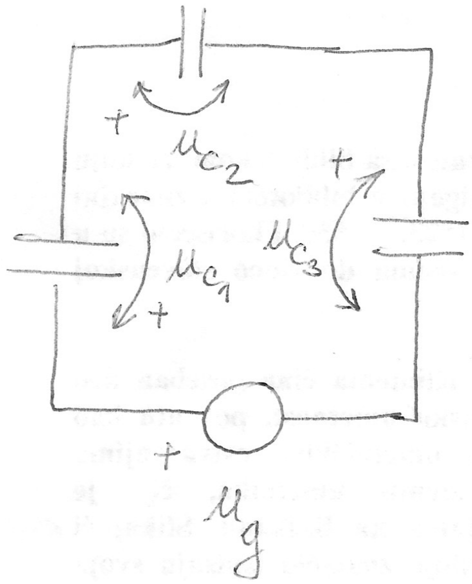
2. Ako su poznate vrijednosti promjenljivih stanja $x_i(t)$ i pobuda $u_j(t)$, moguće je odrediti vrijednosti svih ostalih veličina $y_k(t)$ u kolu.

Vidjeli smo da je početno stanje kola određeno energijom koja je akumulisana u kolu. Pošto je akumulisanu energiju praktično izraziti u funkciji početnih uslova određenih naponima na kondenzatorima i strujama kalemova, pogodno je te veličine odabrati kao promjenljive stanja. Broj promjenljivih stanja n je *red kola* i jednak je broju *nezavisnih početnih uslova* u kolu, odnosno, broju *nezavisnih kondenzatora i kalemova* u kolu. Broj nezavisnih kondenzatora u kolu jednak je broju kondenzatora umanjenom za broj *kondenzatorskih petlji*, a broj nezavisnih kalemova jednak je broju kalemova umanjenom za broj *kalemskih presjeka* u kolu

$$n = b_C - n_C + b_L - n_L, \tag{3}$$

gdje je b_C broj kondenzatora, n_C broj kondenzatorskih petlji, b_L broj kalemova, a n_L broj kalemskih presjeka.

Kondenzatorska petlja je kontura u grafu kola koja sadrži samo grane sa kondenzatorima i idealnim naponskim generatorima, kao na Slici 1. Kalemski



Slika 1: Kondenzatorska petlja.

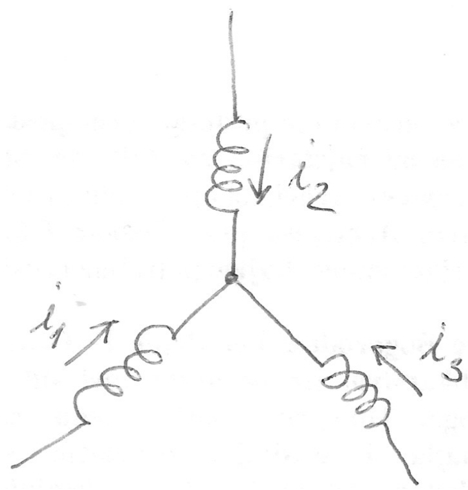
presjek je presjek grafa kola koji sadrži samo grane sa kalemovima i idealnim strujnim generatorima, kao na Slici 2.

1 Formiranje sistema jednačina stanja

Postupak formiranja sistema jednačina stanja zasnovan je na topološkim metodama analize električnih kola i sadrži sljedeće korake:

1. Nacrtati graf električnog kola i grane grafa orijentisati u skladu sa odabranim referentnim smjerovima struja i napona pristupa. Pri crtanju grafa smatrati da svaki pristup elementa odgovara jednoj grani grafa.

2. Odrediti *normalno stablo* grafa. Normalno stablo je stablo koje sadrži sve naponske generatore, maksimalan broj kondenzatora, minimalan



Slika 2: Kalemski presjek.

broj kalemova i potreban broj otpornika, a ne sadrži nijedan strujni generator. Maksimalan broj kondenzatora u definiciji normalnog stabla se odnosi na eventualnu kondenzatorsku petlju u kolu. Očigledno, ukoliko u kolu postoji kondenzatorska petlja onda je nemoguće sve grane konture uključiti u stablo jer to više ne bi bilo stablo. Analogno, ako u kolu postoji kalemski presjek neophodno je jednu granu iz tog presjeka uključiti u stablo kako bi se ispunio uslov da je stablo povezan podgraf polaznog grafa. Očigledno, ako u grafu ne postoje kondenzatorske petlje i kalemski presjeci, sve grane sa kondenzatorima će biti u normalnom stablu, a nijedna grana sa kalemom neće biti uključena u normalno stablo.

3. Za dato normalno stablo promjenljive stanja se biraju kao naponi na kondenzatorima u granama stabla i struje kalemova u spojnicama.

4. Za dato normalno stablo formirati skupove glavnih presjeka i kontura.

5. Za glavne presjeke napisati jednačine po KZS

$$\sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l = 0, k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

a za glavne konture napisati jednačine po KZN

$$\sum_{l=1}^{b} b_{kl} u_l = 0, k = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Takođe, napisati karakteristike elemenata u vidu algebarskih i diferencijalnih jednačina između napona i struja grana u_l i i_l.

6. Eliminisati iz dobijenog sistema jednačina sve veličine osim promjenljivih stanja, odnosno, napona na kondenzatorima u granama stabla i struja kalemova u spojnicama i pobuda. Dakle, struje grana stabla koje sadrže kondenzatore i otpornike treba izraziti preko napona tih grana

$$i_{Ck} = C_k \frac{du_{Ck}}{dt}, \tag{6}$$

$$i_{Rn} = \frac{u_{Rn}}{R_n}. \tag{7}$$

Napone spojnica koje sadrže kalemove i otpornike izražavamo preko njihovih struja

$$u_{Lj} = L_j \frac{di_{Lj}}{dt}, \tag{8}$$

$$u_{Rm} = R_m i_{Rm}. \tag{9}$$

Grane koje sadrže naponske i strujne generatore se opisuju odgovarajućim veličinama, naponima i strujama, respektivno.

7. Dobijene jednačine se zatim svode na normalni oblik u kojem svaka jednačina sadrži izvod tačno jedne promjenljive stanja.

Ukoliko u kolu postoje kondenzatorske petlje ili kalemski presjeci postupak ima malo drugačiji oblik. Naime, u tom slučaju postoje spojnice koje sadrže kondenzatore i grane stabla koje sadrže kalemove. Posmatrajmo sada slučaj grane stabla koja sadrži kalem. Pošto se grana nalazi u stablu grafa potrebno je izraziti struju kalema u funkciji napona. Međutim, ta veza je integralna što ne odgovara formi sistema jednačina stanja. Zbog toga se struja posmatrane grane stabla najprije izražava preko struja ostalih grana (spojnica) koje pripadaju kalemskom presjeku

$$i_{Lk} = \sum_j i_j, \tag{10}$$

pri čemu su i_j struje spojnica koje mogu uključivati i strujne generatore. Konačno, napon grane je

$$u_{Lk} = L_k \frac{d}{dt} \sum_j i_j. \tag{11}$$

Analogno, u slučaju spojnice koja sadrži kondenzator najprije napon izražavamo preko napona ostalih grana koje čine kondenzatorsku petlju

$$u_{Ck} = \sum_j u_j, \tag{12}$$

gdje su u_j naponi grana stabla koje mogu uključivati i naponske generatore. Struja grane je sada

$$i_{Ck} = C_k \frac{d}{dt} \sum_j u_j. \tag{13}$$

U ovom slučaju se u sistemu jednačina stanja mogu pojaviti i prvi izvodi pobuda.

1.1 Primjer

Formirati sistem jednačina stanja za kolo na Slici 3.

Slika 3: Kolo uz primjer formiranja jednačina stanja.

Graf kola sa odabranim referentnim orijentacijama grana je prikazan na Slici 4.

Slika 4: Graf kola uz primjer formiranja jednačina stanja.

Primjer iz knjige. Nisam siguran da je to dobar primjer.

2 Analitičko rješavanje jednačina stanja

Sistem jednačina stanja je oblika

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 f_1\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 f_2\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n f_n,\end{aligned} \tag{14}$$

gdje su f_i linearne kombinacije pobudnih generatora (naponskih i strujnih) i izvoda pobudnih generatora. Rješenje sistema (14) je zbir sopstvenog i partikularnog rješenja, odnosno, sopstvenog i prinudnog odziva kola.

2.1 Određivanje prinudnog odziva

Prinudni odziv ima isti funkcionalni oblik kao pobuda. Pretpostavimo da u kolu za $t > 0$ djeluju pobude oblika

$$u_i\left(t\right) = U_i e^{s_p t}. \tag{15}$$

Mnoge često korištene pobude, kao što su Hevisajdova, impulsna, prostoperiodična, itd, mogu se predstaviti u ovom obliku ili izvesti iz njega.

Ako je učestanost eksponencijalne pobude, s_p različita od svih sopstvenih učestanosti kola, elementi prinudnog odziva su oblika

$$x_{ip}\left(t\right) = X_{ip} e^{s_p t}, \tag{16}$$

gdje su X_{ip} konstante koje mogu biti realne ili kompleksne. Uvrštavanjem u sistem (14) dobija se sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}\left(s_p - a_{11}\right) X_{1p} - a_{12}X_{2p} - \ldots - a_{1n}X_{np} &= b_1 U_1\\ -a_{21}X_{1p} + \left(s_p - a_{22}\right) X_{2p} - \ldots - a_{2n}X_{np} &= b_2 U_2\\ &\vdots\\ -a_{n1}X_{1p} - a_{n2}X_{2p} - \ldots + \left(s_p - a_{nn}\right) X_{np} &= b_n U_n.\end{aligned} \tag{17}$$

Ako je učestanost eksponencijalne pobude s_p jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti s_k prvog reda, odgovarajući element prinudnog odziva je oblika

$$x_{ip}\left(t\right) = \left(X_{ip}^{(1)} + tX_{ip}^{(2)}\right) e^{s_p t}, \tag{18}$$

a ukoliko je odgovarajuća sopstvena učestanost r-tog reda, element prinudnog odziva je oblika

$$x_{ip}\left(t\right)=\left(X_{ip}^{(1)}+tX_{ip}^{(2)}+\ldots t^{r}X_{ip}^{(r)}\right)e^{s_{p}t}. \tag{19}$$

Rješavanjem sistema (17) dobijaju se vrijednosti X_{ip} čime su određeni elementi prinudnog odziva

$$\begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1p} \\ X_{2p} \\ \vdots \\ X_{np} \end{bmatrix} e^{s_{p}t}. \tag{20}$$

2.2 Određivanje sopstvenog odziva

Sopstveni odziv je rješenje homogenog sistema jednačina i pretostavljamo ga u obliku

$$x_{is}\left(t\right)=X_{i}e^{st}, \tag{21}$$

gdje su X_i i s konstante koje treba odrediti. Uvrštavanjem u homogeni sistem jednačina dobija se sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} \left(s-a_{11}\right)X_{1}-a_{12}X_{2}-\ldots-a_{1n}X_{n}&=0\\ -a_{21}X_{1}+\left(s-a_{22}\right)X_{2}-\ldots-a_{2n}X_{n}&=0\\ &\vdots\\ -a_{n1}X_{1}-a_{n2}X_{2}-\ldots+\left(s-a_{nn}\right)X_{n}&=0. \end{aligned} \tag{22}$$

Ovaj sistem ima netrivijalna rješenja ako je determinanta sistema jednaka nuli, odnosno,

$$\det\left(s\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A}\right)=0, \tag{23}$$

gdje je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica reda n.

Jednačina (23) je karakteristična jednačina za matricu $\mathbf{A}$ pa se naziva i *karakteristična jednačina kola*. Korijeni karakteristične jednačine su sopstvene vrijednosti matrice, odnosno, sopstvene učestanosti kola. Broj sopstvenih učestanosti jednak je redu kola.

Ako su sve sopstvene učestanosti kola, $s_k, k=1,\ldots,n$, različite, elementi sopstvenog rješenja su oblika

$$x_{is}\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}X_{i}^{(k)}e^{s_{k}t}. \tag{24}$$

Vektori

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

su *mod-vektori* kola.

Ako je korijen s_1 reda r, a ostali korijeni su prosti, sopstveni odziv je oblika

$$x_{is}(t) = X_i^{(1)} e^{s_1 t} + t X_i^{(2)} e^{s_1 t} + \ldots + t^{r-1} X_i^{(r)} e^{s_1 t} + \sum_{k=r+1}^{n} X_i^{(k)} e^{s_k t},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

U zavisnosti od vrijednosti sopstvenih učestanosti mogu nastupiti tri slučaja:

1. Sopstvena učestanost s_k je realna $s_k = \sigma$. U tom slučaju je i $X_i^{(k)}$ biti realna veličina i svi elementi mod-vektora $\mathbf{m}_k$ će biti realne veličine. Odgovarajuća komponenta sopstvenog odziva je
$$x_{is}(t) = X_i^{(k)} e^{\sigma_k t}. \tag{27}$$
2. Sopstvena učestanost s_k je kompleksna veličina $s_k = \sigma_k + j\omega_k$. U tom slučaju i konjugovano kompleksna vrijednost s_k^* mora biti sopstvena učestanost mreže. Ovom paru sopstvenih učestanosti odgovara par konjugovano kompleksnih konstanti $X_i^{(k)}$ i X_i^{k*} pa su i odgovarajuće komponente sopstvenog odziva konjugovano kompleksne i vrijedi
$$x_{is} + x_{is}^* = C_i^{(k)} e^{\sigma_k t} \cos\left(\omega_k t + \psi_i^{(k)}\right). \tag{28}$$
3. U specijalnom slučaju kada je sopstvena učestanost čisto imaginarna $s_k = j\omega_k$, pa je odgovarajuća komponenta sopstvenog odziva prostoperiodična funkcija
$$x_{is} + x_{is}^* = C_i^{(k)} \cos\left(\omega_k t + \psi_i^{(k)}\right). \tag{29}$$

Kompletan odziv je sada jednak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1p} \\ X_{2p} \\ \vdots \\ X_{np} \end{bmatrix} e^{s_p t} + \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \vdots \\ X_n^{(1)} \end{bmatrix} e^{s_1 t} + \begin{bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ \vdots \\ X_n^{(2)} \end{bmatrix} e^{s_2 t} + \ldots + \begin{bmatrix} X_1^{(n)} \\ X_2^{(n)} \\ \vdots \\ X_n^{(n)} \end{bmatrix} e^{s_n t}. \tag{30}$$

2.3 Određivanje integracionih konstanti

Vrijednosti integracionih konstanti se određuju iz početnih uslova. Razmotrićemo metode sukcesivnih izvoda i direktnu metodu. Pretpostavimo za početak da u kolu ne postoje kondenzatorske petlje ni kalemski presjeci.

2.3.1 Metoda sukcesivnih izvoda

Potrebno je odrediti vrijednosti n^2 integracionih konstanti, $X_i^{(k)}$, polazeći od n početnih uslova

$$x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0). \tag{31}$$

U daljem razmatranju podrazumijevaćemo da su početni uslovi dati za $t = 0^+$, ali ćemo radi jednostavnije notacije koristiti trenutak $t = 0$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u sistem jednačina stanja dobijaju se vrijednosti za

$$\frac{dx_1}{dt}(0), \frac{dx_2}{dt}(0), \ldots, \frac{dx_n}{dt}(0). \tag{32}$$

Deriviranjem jednačina stanja i ponovnim uvrštavanjem dobijamo

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}(0), \frac{d^2x_2}{dt^2}(0), \ldots, \frac{d^2x_n}{dt^2}(0). \tag{33}$$

Ponavljanjem postupka n puta dobijamo vrijednosti svih izvoda do n-tog, promjenljivih stanja u $t = 0$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}(0), \frac{d^nx_2}{dt^n}(0), \ldots, \frac{d^nx_n}{dt^n}(0). \tag{34}$$

Sa druge strane, iz opšteg rješenja sistema jednačina stanja (30) imamo

$$x_i(0) = x_{ip}(0) + \sum_{k=1}^{n} X_i^{(k)}, i = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Deriviranjem opšteg rješenja i izračunavanjem vrijednosti u $t = 0$, dobijamo

$$\frac{dx_i}{dt}(0) = \frac{dx_{ip}}{dt}(0) + \sum_{k=1}^{n} s_k X_i^{(k)}, i = 1, \ldots, n, \tag{36}$$

$$\vdots \tag{37}$$

$$\frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}}(0) = \frac{d^{n-1}x_{ip}}{dt^{n-1}}(0) + \sum_{k=1}^{n} s_k^{n-1} X_i^{(k)}, i = 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Rješavanjem dobijenog sistema od n^2 algebarskih jednačina dobijamo vrijednosti integracionih konstanti.

2.3.2 Direktna metoda

Pri određivanju sopstvenog odziva, došli smo do sistema jednačina (22) koji ćemo ponoviti ovdje radi preglednosti

$$\begin{aligned} (s-a_{11})\,X_1 - a_{12}X_2 - \ldots - a_{1n}X_n &= 0 \\ -a_{21}X_1 + (s-a_{22})\,X_2 - \ldots - a_{2n}X_n &= 0 \\ &\vdots \\ -a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \ldots + (s-a_{nn})\,X_n &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Da bi ovaj sistem imao netrivijalna rješenja njegova determinanta treba da bude jednaka nuli. Slijedi da su jednačine linearno zavisne za svaku sopstvenu učestanost $s_k, k = 1, \ldots, n$ i jedna jednačina se može izostaviti. Bez gubitka opštosti pretpostavimo da smo izostavili prvu jednačinu. Dobijeni sistem jednačina se može riješiti, za konkretnu sopstvenu učestanost, tako što ćemo konstanti $X_1^{(k)}$ dodijeliti proizvoljnu vrijednost,

$$X_1^{(k)} = K^{(k)}. \tag{40}$$

Dijeljenjem svih jednačina sa $K^{(k)}$ i prebacivanjem članova $a_{l1}, l > 1$ na desnu stranu dobijamo

$$\begin{aligned} (s_k-a_{22})\,\frac{X_2^{(k)}}{K^{(k)}} - a_{23}\frac{X_3^{(k)}}{K^{(k)}} - \ldots - a_{2n}\frac{X_n^{(k)}}{K^{(k)}} &= a_{21} \\ a_{32}\frac{X_2^{(k)}}{K^{(k)}} + (s_k-a_{33})\,\frac{X_3^{(k)}}{K^{(k)}} - \ldots - a_{3n}\frac{X_n^{(k)}}{K^{(k)}} &= a_{31} \\ &\vdots \\ a_{n2}\frac{X_2^{(k)}}{K^{(k)}} - a_{n3}\frac{X_3^{(k)}}{K^{(k)}} - \ldots + (s_k-a_{nn})\,\frac{X_n^{(k)}}{K^{(k)}} &= a_{n1} \end{aligned} \tag{41}$$

Rješenja ovog sistema su oblika

$$\frac{X_i^{(k)}}{K^{(k)}} = \frac{\Delta_{1i}\,(s_k)}{\Delta_{11}\,(s_k)}, i = 2, 3, \ldots, n, \tag{42}$$

gdje je $\Delta_{jk}\,(s_k)$ kofaktor j-te vrste i k-te kolone sistema. Odavde slijedi da je, za datu sopstvenu učestanost,

$$\frac{K^{(k)}}{\Delta_{11}\,(s_k)} = \frac{X_1^{(k)}}{\Delta_{11}\,(s_k)} = \frac{X_2^{(k)}}{\Delta_{12}\,(s_k)} = \ldots = \frac{X_n^{(k)}}{\Delta_{1n}\,(s_k)}. \tag{43}$$

Analogna veza između konstanti vrijedi i ako se iz sistema (22) izostavi proizvoljna j-ta jednačina i konstanti $X_j^{(k)}$ dodijeli proizvoljna vrijednost. Dobijenih $n-1$ relacija daju veze između integracionih konstanti na proizvoljnoj sopstvenoj učestanosti što znači da ukupno imamo $n\,(n-1)$ relaciju. Pošto imamo i n nezavisnih početnih uslova slijedi da možemo odrediti n^2 integracionih konstanti.

Sada, na osnovu vrijednosti proizvoljno izabrane integracione konstante, npr. $X_1^{(k)}$ možemo odrediti vrijednosti svih integracionih konstanti u obliku

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ X_3^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta_{12}(s_k)}{\Delta_{11}(s_k)} \\ \frac{\Delta_{13}(s_k)}{\Delta_{11}(s_k)} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}(s_k)}{\Delta_{11}(s_k)} \end{bmatrix} K^{(k)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k)} \\ \lambda_2^{(k)} \\ \lambda_3^{(k)} \\ \vdots \\ \lambda_n^{(k)} \end{bmatrix} K^{(k)}, \tag{44}$$

pri čemu je $\lambda_1^{(k)} = 1$. Sada je kompletan odziv mreže

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1p} \\ X_{2p} \\ \vdots \\ X_{np} \end{bmatrix} e^{s_p t} + \sum_{k=1}^{n} K^{(k)} \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k)} \\ \lambda_2^{(k)} \\ \lambda_3^{(k)} \\ \vdots \\ \lambda_n^{(k)} \end{bmatrix} e^{s_k t}. \tag{45}$$

Određivanje konstanti
Mod-vektori

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{46}$$

odražavaju raspodjelu promjenljivih stanja na određenoj sopstvenoj učestanosti mreže. Iz (43) vidimo da su vrijednosti mod-vektora određene unutar multiplikativne konstante.