Ustaljeni složenoperiodični režim u električnim kolima

13. januar 2016

Složenoperiodična veličina (struja ili napon) se može napisati u obliku

$$f\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}\left(t\right)=F^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}F^{(k)}\cos\left(k\omega t+\theta^{(k)}\right). \tag{1}$$

Ovakva reprezentacija složenoperiodičnog signala može se dobiti razvojem funkcije u Furijeov red. Komponente složenoperiodičnog signala $f^{(k)}\left(t\right)$ nazivaju se harmonici. Komponenta

$$f^{(0)}\left(t\right)=F^{(0)}, \tag{2}$$

naziva se nulti harmonik ili jednosmjerna komponenta složenoperiodičnog signala. Komponenta

$$f^{(1)}\left(t\right)=\sqrt{2}F^{(1)}\cos\left(\omega t+\theta^{(1)}\right), \tag{3}$$

naziva se osnovni harmonik. Harmonici za $k>2$ nazivaju se viši harmonici.

Analogno sa pojmovima koji su uvedeni u analizi prostoperiodičnog režima definiše se srednja vrijednost funkcije $f\left(t\right)$

$$F_0=\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)dt=F^{(0)}. \tag{4}$$

Takođe se definiše i efektivna vrijednost složenoperiodične veličine

$$F=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2\left(t\right)dt}. \tag{5}$$

Efektivna vrijednost složenoperiodične struje jednaka je onoj vrijednosti konstantne struje koja u jednoj periodi na otporniku R razvije istu količinu toplote. Vrijedi

$$RI_{ef}^2T=\int_0^T Ri^2\left(t\right)dt. \tag{6}$$

Izračunaćemo efektivnu vrijednost složenoperiodičnog signala (1). Iz (1) slijedi

$$f^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(l)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f^{(k)}\right)^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \neq k} 2 f^{(k)} f^{(l)} = \tag{7}$$

$$= \left(F^{(0)}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2} F^{(k)}\right)^2 \cos^2\left(k\omega t + \theta^{(k)}\right) + \tag{8}$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \neq k} \sqrt{2} F^{(k)} \cos\left(k\omega t + \theta^{(k)}\right) \sqrt{2} F^{(l)} \cos\left(l\omega t + \theta^{(l)}\right). \tag{9}$$

Kvadrat efektivne vrijednosti je

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(f^{(k)}\right)^2 \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \neq k} 2 f^{(k)} f^{(l)} \right)^2 dt. \tag{10}$$

Drugi sabirak je jednak nuli zbog ortogonalnosti kosinusnih funkcija pa je

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(F^{(0)}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(F^{(k)}\right)^2 \frac{1 + \cos 2\left(k\omega t + \theta^{(k)}\right)}{2} \right] dt. \tag{11}$$

Odavde slijedi

$$F^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^{(k)}\right)^2, \tag{12}$$

odnosno,

$$F = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(F^{(k)}\right)^2}. \tag{13}$$

Dakle, kvadrat efektivne vrijednosti složenoperiodičnog signala jednak je sumi kvadrata jednosmjerne komponente i kvadrata efektivnih vrijednosti pojedinih harmonika.

Odstupanje složenoperiodičnog od prostoperiodičnog signala kvantitativno se ocjenjuje pomoću sljedećih veličina

1. klir-faktor

$$K = \frac{\sqrt{\left(F^{(2)}\right)^2 + \left(F^{(3)}\right)^2 + \cdots}}{F} = \frac{\sqrt{\left(F^{(2)}\right)^2 + \left(F^{(3)}\right)^2 + \cdots}}{\sqrt{\left(F^{(1)}\right)^2 + \left(F^{(2)}\right)^2 + \cdots}}. \tag{14}$$

2. Faktor talasnosti

$$K_t = \frac{\sqrt{\left(F^{(1)}\right)^2 + \left(F^{(2)}\right)^2 + \cdots}}{F^{(0)}}. \tag{15}$$

3. Amplitudni (vršni) faktor

$$K_a = \frac{F_{max}}{F} \tag{16}$$

1 Snage u ustaljenom složenoperiodičnom režimu

Ulazna snaga mreže je jednaka

$$p(t) = u(t)\, i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)} \sum_{k=0}^{\infty} i^{(l)} = \tag{17}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)} i^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \neq k} u^{(k)} i^{(l)}, \tag{18}$$

gdje su

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= U^{(0)} \\ i^{(0)} &= I^{(0)} \\ u^{(k)} &= \sqrt{2} U^{(k)} \cos\left(k\omega t + \theta^{(k)}\right),\ k = 1, 2, \ldots \\ i^{(k)} &= \sqrt{2} I^{(k)} \cos\left(k\omega t + \psi^{(k)}\right),\ k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Aktivna (srednja) snaga je

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)} i^{(k)} \right) dt, \tag{19}$$

pri čemu je srednja vrijednost drugog sabirka jednaka nulil zbog ortogonalnosti kosinusnih funkcija. Dalje je

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U^{(0)} I^{(0)} dt + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left[\sqrt{2} U^{(k)} \cos\left(k\omega t + \theta^{(k)}\right) \sqrt{2} I^{(k)} \cos\left(k\omega t + \psi^{(k)}\right) \right] dt = \tag{20}$$

$$= U^{(0)} I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 U^{(k)} I^{(k)}}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[\cos\left(\theta^{(k)} - \psi^{(k)}\right) + \cos\left(2k\omega t + \theta^{(k)} + \psi^{(k)}\right) \right] dt = \tag{21}$$

$$= U^{(0)} I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} I^{(k)} \cos \varphi^{(k)}, \tag{22}$$

gdje je $\varphi^{(k)} = \theta^{(k)} - \psi^{(k)}$ fazni pomak k-tog harmonika.

Budući da je aktivna snaga k-tog harmonika jednaka

$$P^{(k)} = U^{(k)} I^{(k)} \cos \varphi^{(k)}, \tag{23}$$

vidimo da je aktivna snaga složenoperiodičnog signala jednaka sumi aktivnih snaga pojedinih harmonika.

Analogno, reaktivna snaga k-tog harmonika ($k > 1$) je data sa

$$Q^{(k)} = U^{(k)} I^{(k)} \sin \varphi^{(k)}. \tag{24}$$

Važno je napomenuti da je za jednosmjernu komponentnu reaktivna snaga jednaka nuli pa taj slučaj ne razmatramo. Ponekad se definiše i ukupna reaktivna snaga složenoperiodičnog signala kao suma reaktivnih snaga pojedinih harmonika

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} I^{(k)} \sin \varphi^{(k)}. \tag{25}$$

Međutim, ova veličina nema fizički smisao zato što reaktivne snage pojedinih harmonika mogu biti pozitivne i negativne pa njihov zbir neće na pravi način karakterisati razmjenu energije između posmatrane mreže i ostatka kola.

Prividna snaga se definiše na isti način kao i u prostoperiodičnom režimu, kao proizvod efektivnih vrijednosti napona i struje

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(U^{(k)}\right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(I^{(l)}\right)^2}. \tag{26}$$

Prividna snaga se može predstaviti na sljedeći način

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2, \tag{27}$$

gdje je član

$$D^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(U^{(k)} I^{(l)}\right)^2 + \left(U^{(l)} I^{(k)}\right)^2 - 2U^{(k)} U^{(l)} I^{(k)} I^{(l)} \cos\left(\varphi^{(k)} - \varphi^{(l)}\right) \right], \tag{28}$$

nazvan *snaga izobličenja (deformacije)*, sa jedinicom volt-amper deformacije (VAd). Međutim, važno je napomenuti da u složenoperiodičnom režimu reaktivna snaga i snaga deformacije nemaju fizičko tumačenje. U elektroenergetskom sistemu obje veličine imaju sličan uticaj pa se teži njihovoj minimizaciji.

Kompleksne snage pojedinih harmonika se definišu kao

$$\underline{S}^{(k)} = \underline{U}^{(k)} \left(\underline{I}^{(k)}\right)^* \tag{29}$$

2 Analiza mreža u ustaljenom složenoperiodičnom režimu

Ako linearnu vremenski nepromjenljivu i pasivnu mrežu pobuđujemo složenoperiodičnim generatorom u kolu će, nakon završetka prelaznog režima, biti uspostavljen ustaljeni složenoperiodični režim. Pošto je složenoperiodičnu pobudu moguće posmatrati kao linearnu kombinaciju prostoperiodičnih pobuda (harmonika) i prinudni odziv će sadržati harmonike na istim frekvencijama. Prinudni odziv je moguće odrediti primjenom teoreme superpozicije tako što se odrede odzivi na pojedine harmonike i konačni odziv se odredi njihovim sabiranjem. Neka je n-ti harmonik pobude

$$u_g^{(n)}(t) = \sqrt{2}U^{(n)} \cos\left(n\omega t + \theta^{(n)}\right). \tag{30}$$

Odziv na ovaj harmonik se onda može odrediti u obliku

$$o^{(n)}(t) = \sqrt{2}G(n\omega)\,U^{(n)} \cos\left(n\omega t + \theta^{(n)} + \phi(n\omega)\right). \tag{31}$$

Složenoperiodični odziv je

$$o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}G(n\omega)\,U^{(n)} \cos\left(n\omega t + \theta^{(n)} + \phi(n\omega)\right), \tag{32}$$

gdje je $\underline{G}(j\omega) = G(\omega)\,e^{j\phi(\omega)}$ kompleksna funkcija mreže.

Odzivi na pojedine harmonike se mogu naći korištenjem kompleksnih predstavnika, pri čemu se, kao što je naznačeno gornjim jednačinama, umjesto $j\omega$ piše $jn\omega$. Važno je naglasiti da se kompleksne vrijednosti napona i struja različitih harmonika ne smiju sabirati.